L’armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali

Silvia Sbaragli
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bologna e Bolzano, Italia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

Questo articolo è stato oggetto di pubblicazione in:
Sbaragli S. (ed.) (2006). *La Matematica e la sua Didattica, vent’anni di impegno.* Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, 23 09 2006. Roma: Carocci.

Abstract. *In this paper we present an important aspect of student’s geometrical training: figural and conceptual aspects.*

La tematica dell’*armonizzazione degli aspetti figurali e concettuali* è stata introdotta da Fischbein fin dal lontano 1963 ma iniziò ad affermarsi soltanto trent’anni dopo, soprattutto grazie ad un fondamentale articolo del 1993 dove vengono analizzati in profondità i *concetti figurali*: «Una figura geometrica può essere descritta come avente intrinsecamente proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica non è puro concetto. È un’immagine, un’immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono simultaneamente proprietà concettuali e figurali». Gli “oggetti” di studio della geometria sono quindi *concetti figurali* con proprietà spaziali (forma, posizione e grandezza) e qualità concettuali (idealità, astrattezza, generalità e perfezione) intrinsecamente legati tra loro, la cui completa fusione risulta essere solo «una situazione ideale, estrema, che vincoli psicologici non permettono di raggiungere completamente» (Fischbein, 1993): uno legato alla percezione sensoriale e l’altro legato al dominio concettuale. Questi distinti vincoli non impediscono però una *armonizzazione dei due aspetti*, necessaria e cruciale dal punto di vista didattico.
In effetti i concetti geometrici, diversamente da altri concetti matematici, necessitano di rappresentazioni figurali per poter essere compresi, ma la sola rappresentazione figurale non è di per sé sufficiente per formare il concetto geometrico; solo con un atto mentale, un disegno può essere interpretato e può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità. Se ciò non avviene, c’è il rischio che la rappresentazione iconica venga identificata con il concetto geometrico (D’Amore, 2003), ossia che l’aspetto figurale sia troppo forte e porti a cancellare gli indispensabili vincoli concettuali. Il giusto equilibrio tra la componente concettuale e figurale di un determinato oggetto geometrico non sempre si realizza nell’allievo; talvolta misconcezioni (D’Amore, Sbaragli,

2005; Martini, Sbaragli, 2005) sono imputabili proprio alla preponderanza di una sull’altra, soprattutto dell’aspetto figurale su quello concettuale. Invece, idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure, per stabilire un controllo conforme alla teoria geometrica, senza far scomparire il contributo della componente figurale. Tale processo di costruzione dei concetti figurali non è naturale e spontaneo per l’allievo; per questo l’insegnante deve aver cura di stimolare in modo continuativo e sistematico «l’integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei vincoli concettuali su quelli figurali» (Fischbein, 1993), scegliendo strumenti e situazioni adatte a tale scopo.

Quando si parla di aspetto figurale, il *fattore percettivo* entra con forza, influenzando le prestazioni in àmbito geometrico; tale fattore è una delle quattro forme di comprensione cognitiva menzionate da Duval (1995) collegate al modo in cui una persona guarda il disegno di una figura geometrica: *percettiva, sequenziale, discorsiva e operativa*. La comprensione *percettiva* si riferisce a ciò che una persona riconosce a una prima occhiata quando guarda una figura geometrica; essa assume quindi una funzione importante: «Il pensiero visivo (visual thinking) non potrà mai essere semplicemente relegato sullo sfondo ma resterà sempre una componente da non trascurare» (Mariotti, 2005) sulla quale è necessario riflettere didatticamente. Per percezione visiva si intende il processo di ricostruzione di un immagine interna, a partire dagli stimoli sensoriali. La rappresentazione figurale non è verità oggettiva, ma soggettiva, rappresentazione cioè sempre interpretabile. Questo principio è stato testimoniato dagli studi sulla percezione visiva ma è fondamentale anche in àmbito matematico, dove la componente figurale è intrinsecamente collegata agli “oggetti” geometrici.
In effetti, risulta didatticamente importante far percepire la varietà di interpretazione e gli “inganni” che si celano nelle rappresentazione iconiche, spesso legati a fattori percettivi. A questo scopo occorre sensibilizzare gli allievi ad un “pensiero visivo” acuto e critico, per renderli “diffidenti” nei confronti dell’aspetto figurale ed essere così capaci di far prevalere l’aspetto concettuale.

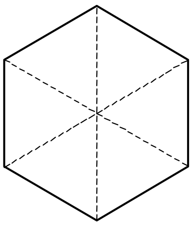
Da questo punto di vista è possibile proporre agli allievi immagini “reversibili”, immagini cioè che consentono più letture ugualmente valide, ma che si escludono a vicenda. Di seguito riportiamo due esempi che si riferiscono all’àmbito geometrico e all’àmbito reale.

	*Un cubo con una concavità cubica o un cubetto in un angoloide?*		*Il viso di un indiano o un eschimese di spalle?*

Come osserva Staccioli (1993): «Queste immagini suscitano sempre nell’osservatore una grande interesse, forse perché mettono in crisi, in modo

anche divertente, la certezza percettiva per mezzo della quale dovremo farci un'idea stabile del mondo».
Confrontando le proprie letture, gli studenti si rendono conto della validità di ognuna di esse e, di conseguenza, di come, talvolta, la percezione sia "inaffidabile" per un riconoscimento univoco e certo delle rappresentazioni. Eppure, può anche capitare che siano gli insegnanti stessi a mostrare una figura e a dare per scontata la sua interpretazione, considerandola ovvia e univoca; ma ciò che quell'immagine può evocare nell'allievo può essere completamente diverso, ma allo stesso tempo valido e accettabile, rispetto a quello che l'insegnante si aspetta in quel momento. Per controllare l'attinenza delle interpretazioni è quindi importante esplicitare e comunicare ciò che si osserva e far sì che l'aspetto figurale sia gestito da quello concettuale.

In tal senso riportiamo un breve stralcio di una ricca e partecipata conversazione avvenuta in una IV primaria di Rocca San Casciano (FC).



Alla richiesta: *«Che cosa vedi?»* effettuata dall'insegnante dopo aver mostrato la figura qui a fianco, le risposte degli allievi sono state le più disparate:

Em.: «Vedo triangoli… sei».
I.: «Un esagono».
R.: «Dei trapezi».
Em.: «È sempre quello che vedevo io, solo che te lo stai spostando…».
[Solo dopo essere andati a rappresentare alla lavagna (vedi fotografia), gli allievi hanno stabilito che di trapezi congruenti se ne possono vedere sei].

(…)
M.: *«Io vedo i quadrati che sono le facce del cubo».*
C.: «Anch'io vedo le facce del cubo che sono quadrate».
Ins.: «Quanti quadrati vedete?».
G.: «Vedo all'interno del cubo i sei quadrati che ha detto la Claudia».
Per riuscire a vedere i sei quadrati, che sono le sei facce del cubo, è necessario far prevalere l'aspetto concettuale su quello figurale, in quanto occorre entrare nel contesto tridimensionale e conoscere le caratteristiche concettuali dell'"oggetto cubo", dato che l'immagine, se pensata nel piano, può essere interpretata in modo diverso, come precisa Rudi: *«Ma io vedo 3 parallelogrammi».*
Em.: «Ma li hai messi in un modo che sembrano le 3 facce di un cubo, non vedi? Quindi sono quadrati, perché il cubo ha facce quadrate. Lo vedi il cubo?».
R.: «Ah, sì».

Come si nota da questa conversazione, l’aspetto concettuale può risultare determinante per interpretare la rappresentazione.

Ins.: «Ma se pensate a queste figure nel piano sono parallelogrammi o rombi?».

El.: «Per essere un parallelogramma deve avere almeno due lati opposti uguali e due lati opposti uguali… Se ci sono due lati opposti uguali che sono diversi dagli altri due lati opposti uguali è un parallelogramma, ma se ci sono due lati opposti uguali e due lati opposti uguali che sono uguali, allora è un rombo».

Il.: «Ma, un attimo… dove c’era un rombo io vedo una piramide».

Ins.: «Una piramide? Spiegaci bene che cosa vedi».

(Ilaria disegna alla lavagna una piramide partendo da un rombo).

Ins.: «Quante facce ci sono in questa piramide?».

Ilaria: «Vedo due facce e mi immagino altre tre facce».

(In gruppo usano le mani per interpretare e far comprendere il disegno della lavagna).

Ins.: «Di che forma è l’ultima faccia?».

Ilaria: «Quadrata».

(Elia contesta la spiegazione data da Ilaria e sostiene che “dietro” le due facce disegnate sul foglio ci sono solo altre due facce: Elia “vede” un tetraedro. Ma c’è anche chi ipotizza altri tipi di piramidi…).

Queste attività sono validi strumenti per sviluppare un “occhio intelligente” in grado di interpretare in diversi modi e criticamente le immagini, senza ancorarsi troppo all’aspetto figurale, ma mettendo in azione quello concettuale. In effetti, per riuscire a spiegare agli altri ciò che gli allievi hanno “visto” in una semplice figura, è stato necessario descriverle, interpretarle, capirne il contesto di riferimento, modificarle, rileggerle e far uso di tutte e quattro le componenti cognitive menzionate da Duval (1995): *percettiva; sequenziale* (che viene coinvolta per descrivere la costruzione di una figura)*; discorsiva* (che fa riferimento alle proprietà matematiche che devono essere date mediante descrizioni o possono essere derivate da proprietà) *e operativa* (che dipende dai diversi modi di modificare una figura), armonizzando l’aspetto figurale con quello concettuale e facendo uso di più registri di rappresentazione semiotica.

Bibliografia

D’Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D’Amore B, Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Duval R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processings. In: R. Sutherland, J. Mason (eds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education*. Berlin: Springer-Verlag. 14-157.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics.* 24, 139-162.

Mariotti M. A. (2005). *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria.* Bologna: Pitagora.

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71. Bologna: Pitagora.

Staccioli G. (ed.) (1993). *Progettare immagini.* Firenze: La Nuova Italia.